# Metodički postupak primjene znanstvenih metoda pri obradi eksponencijalne funkcije*

Branka Gotovac**

**Ključne riječi:** nastava matematike, istraživački rad, znanstvene metode, eksponencijalna funkcija

## Uvod

Prema iskustvima u radu sa studentima prve godine Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu, može se reći da studenti imaju poteškoća pri izradi zadataka u kojima se pojavljuje, bez obzira u kojem kontekstu, eksponencijalna i logaritamska funkcija.

Pogreške i problemi uočeni su i pri ispravljanju zadatka (sl. 1) koji je zadan jednoj grupi studenata u okviru prvog kolokvija kolegija Matematika 1[1]. Druga je grupa imala gotovo istovjetan zadatak, s polaznom funkcijom $\log_2 x$, i slične pogreške kao studenti prve grupe. Izdvojimo neke. Kod crtanja grafa dane funkcije, uzmimo eksponencijalnu funkciju, odabire se premali broja točaka, samo dvije do tri, tako da je kao graf funkcije nacrtan čak i pravac!? Zanimljivo je da neke od krivulja koje su studenti nacrtali „podsjećaju na pravu". Krivulja koja se traži mogla bi se dobiti iz njih određenim „intervencijama", primjerice translacijom (ovo bi bilo korisno sročiti kao zadatak). Očito je da studenti imaju i nejasnoća vezanih za pojam osne simetrije, što je razvidno prema nacrtanim grafovima za pripadajuću inverznu funkciju.

Ima studenata koji ne znaju računati s potencijama, posebice ako je eksponent 0 odnosno ako je negativan. Tako je i kod računanja s logaritmima.

S namjerom da se pomogne studentima da osvijeste i eventualno razjasne poteškoće koje imaju, konstruirani su testovi A i B.

U nastavku su analizirani rezultati testa A i dane smjernice za analizu testa B. Rezultati su ukazali na znatno dublje korijene neznanja ispitanika. Navedena isku-

*Predavanje održano na 6. kongresu nastavnika matematike RH 2014. u Zagrebu

**Branka Gotovac, Kemijsko-tehnološki fakultet, Split

[1]Matematika 1 kolegij je prvog semestra za studente preddiplomskog studija kemije i preddiplomskog studija kemijske tehnologije (smjera Kemijsko inženjerstvo i od ove akademske godine smjera Zaštita okoliša).

stva i rezultati bili su poticaj za razmišljanje o pristupu učenju i poučavanju u nastavi matematike uopće.

Izrađeni su nastavni materijali za obradu funkcija eksponencijalnog rasta.

4.
- *Nacrtati graf funkcije* $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
- *Navesti* $D_f$.
- *Odrediti* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
- *Je li funkcija omeđena? Obrazložiti.*
  - *Zašto funkcija ima inverznu funkciju* $f^{-1}$? *Obrazložiti.*
  - *Nacrtati graf inverzne funkcije* $f^{-1}$ *funkcije* $f$.
  - $f^{-1}(x) =$ _______________ *(Nadopuniti.)*
  - *Navesti* $D_{f^{-1}}$.

*Napomena: Označiti sjecišta grafa funkcije s koordinatnim osima.*

*Slika 1. Zadatak iz 1. kolokvija*

## Testovi

Studenti koji su na kolokviju imali gore navedeni zadatak, dobili su testove $A_1$ i $B_1$ (slike $2_1$ i $3_1$). Dakle, kao polazna funkcija dana im je opet eksponencijalna funkcija pada, a uz to je priložen kvalitativan graf za obje klase eksponencijalnih funkcija (vidjeti test $A_1$). Testovi su pisani isti sat, najprije $A_1$ (predviđeno je deset minuta[2]), zatim $B_1$.

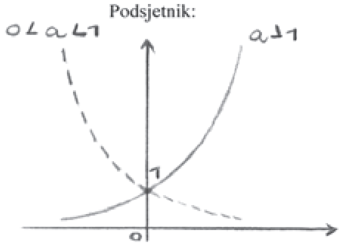
Studenti druge grupe imali su analogne testove $A_2$ i $B_2$ (dani su u prilogu, slike $2_2$ i $3_2$). Kao polazna funkcija dana im je funkcija $\log_3 x$ (vidjeti test $A_2$). Dakle, opet rastuća logaritamska funkcija.

Navedimo da je studentima, u sklopu obrade[3] osnovnih elementarnih funkcija, zadano da nacrtaju baš grafove funkcija $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $\log_3 x$ (neobavezan zadatak za vježbu). Također, za očekivati je da su studenti nakon provedenog kolokvija razmišljali o onome što (ni)su napisali, diskutirali s kolegama... Stoga i to valja uzeti u obzir.

Ime i prezime:

- Nacrtaj graf funkcije $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Podsjetnik:



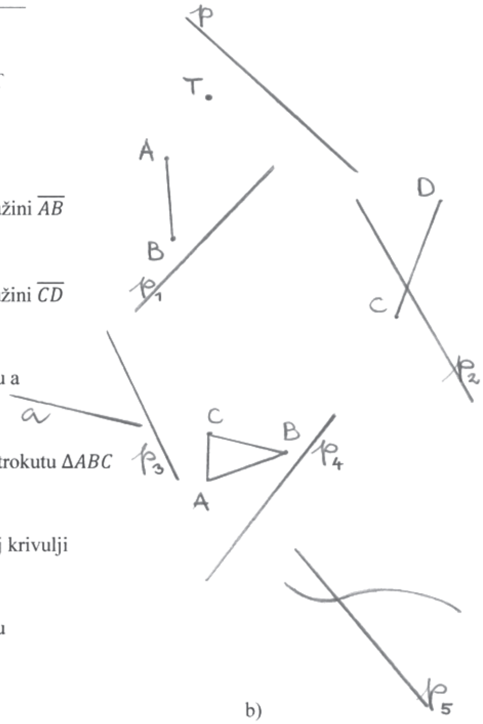

Graf funkcije $a^x$

*Slika $2_1$. Test $A_1$*

[2]Namjera je bila da vrijeme ne bude ograničavajući faktor.

[3]većim dijelom ponavljanje sadržaja poznatih iz srednje škole i sistematizacija

Ime i prezime:_________________________




- Odredi točku **T´** simetričnu točki T

obzirom na pravac p. **Opiši postupak**.

- Odredi dužinu $\overline{A'B'}$ simetričnu dužini $\overline{AB}$

obzirom na pravac $p_1$.

- Odredi dužinu $\overline{C'D'}$ simetričnu dužini $\overline{CD}$

obziromna pravac $p_2$.

- Odredi pravac **a´** simetričan pravcu a

obzirom na pravac $p_3$.

- Odredi trokut $\Delta A'B'C'$ simetričan trokutu $\Delta ABC$

obzirom na pravac $p_4$.

- Odredi krivulju simetričnu zadanoj krivulji

obzirom na pravac $p_5$.

- Odredi lik simetričan zadanom liku

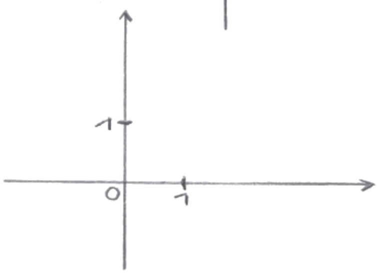
obzirom na pravac p:

a) b)


**1.** U danom kordinatnom sustavu:

- nacrtaj krivulju $y = log_3 x$,

(*Uputa*: popuni tablicu i ucrtaj dobivene točke, osim prve i zadnje.)




| x | $^1/_{27}$ | $^1/_9$ | $^1/_3$ | 1 | 3 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | | |

- nacrtaj pravac $y = x$,
- nacrtaj krivulju simetričnu krivulji $y = log_3 x$ obzirom na pravac $y = x$.

**2.** Računski odredi koordinate točke T´ simetrične točki T(9,2) obzirom na pravac $y = x$.

(*Uputa*: za račun koristi poleđinu stranice.)

*Podsjetnik*:

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$.................................uvjet okomitosti pravaca $p_1$ i $p_2$

$y - y_1 = k(x - x_1)$................jednadžba pravca kroz točku $(x_1, x_2)$ u zadanom smjeru

$P(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$......................koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$

*Slika $3_1$. Test $B_1$*

## Rezultati

U radu ćemo se osvrnuti samo na rezultate testa $A_1$ ($A_2$). Test $B_1$ ($B_2$) konstruiran je prvenstveno da bi pripomogao studentima pri razjašnjavanju pojma osne simetrije. Danas je, posebice po ovom pitanju, dostupno mnoštvo izvrsnog interaktivnog nastavnog materijala (*Sketchpad, GeoGebra*), na što su studenti i upućeni.

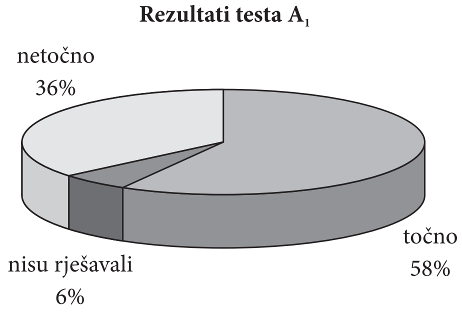
Svakako bi bilo zanimljivo usporediti rezultate zadataka unutar samog testa $B_1$($B_2$). (Npr. prvi uvodni zadatak, određivanje točke simetrične drugoj točki s obzirom na pravac i opis postupka, i 2. zadatak. Također, ustanoviti jesu li studenti koji su ispravno riješili prvih sedam uvodnih zadataka ispravno riješili i 1. zadatak, i time potvrdili da im je pojam osne simetrije jasan...) Konačno, komparirati rezultate testova $A_1$ i $B_1$ ($A_2$ i $B_2$) s rezultatima zadatka iz 1. kolokvija.

Testom $A_1$ ispitano je 36 studenata. Zadatak je točno riješio 21 student (58%), netočno 13 studenata (36%), a 2 studenta (6%) nisu rješavala zadatak.

Od 30 studenata, zadatak testa $A_2$ točno je riješilo njih 14 (47%), netočno 13 (43%), a preostala 3 (10%) nisu rješavala zadatak.

Dakle, testovima $A_1$ i $A_2$ ispitano je 66 studenata od kojih je 35 (53%) zadatak riješilo ispravno, 26 (39%) pogrešno, a 5 (8%) nije rješavalo zadatak.

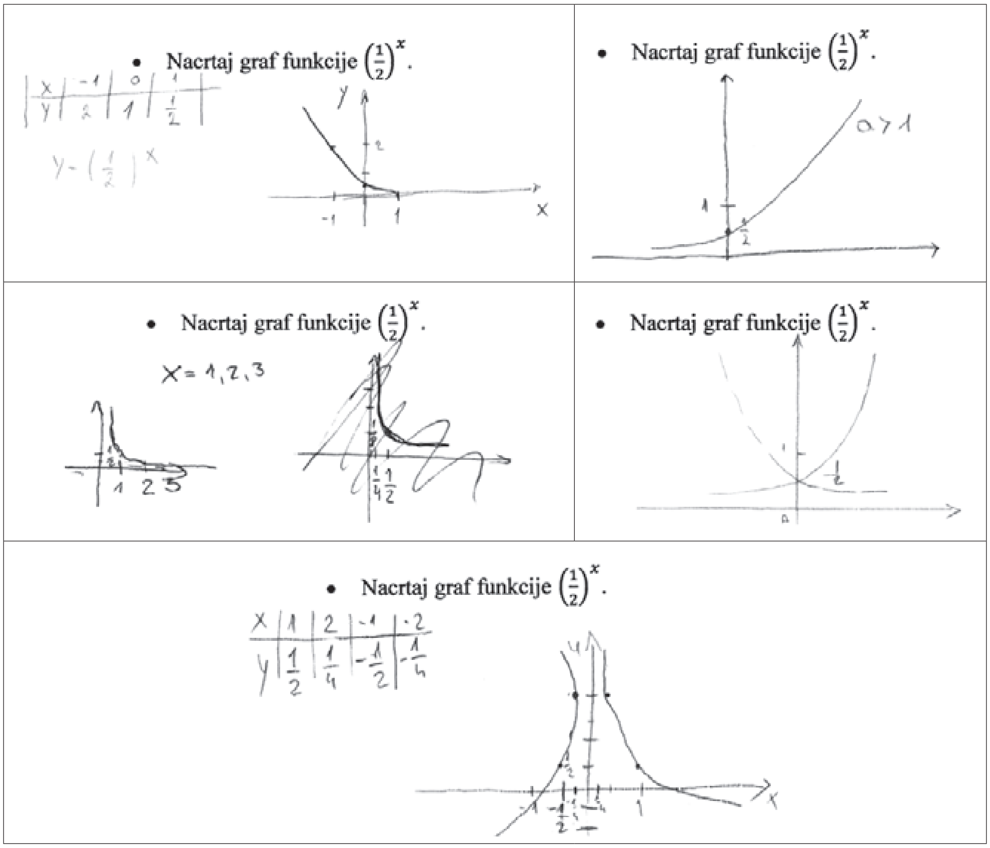
Razmatrajući testove $A_1$ i $A_2$ pojedinačno, i oba zajedno, uočavamo da je u svakom slučaju oko polovice testiranih zadatak riješilo točno, pogrešno nešto više od trećine i oko deset posto ispitanika zadatak nije rješavalo. Stoga bismo mogli reći da grafički prikaz rezultata (razdioba rezultata) testa $A_2$, odnosno testova $A_1$ i $A_2$ zajedno, kvalitativno odgovara grafičkom prikazu rezultata zadatka testa $A_1$ (sl. 4).




*Slika 4. Grafički prikaz rezultata zadatka testa $A_1$*

Neka pogrešna rješenja zadatka testa $A_1$ koja su naveli studenti prikazana su na slici 5. Svaki od uradaka u 1. retku i u 2. retku desno reprezentant je uradaka grupe studenata s istim „rješenjem". Grupe su gotovo podjednake (3 – 4 studenta).

Kvalitativnu analizu „rješenja" (sl. 5) mogu provesti nastavnici sa svojim učenicima u vidu **zadatka**: Što je pogrešno? Prodiskutiraj svako od rješenja na slici.




*Slika 5. Neka „rješenja" zadatka testa $A_1$*

## Rezultati – poticaj za razmišljanje

Kako protumačiti ovako loše rezultate? Od 66 studenata, gotovo svaki drugi pogrešno je riješio zadatak testa $A_1$ odnosno $A_2$, ili ga nije rješavao. Što se može učiniti? Na što možemo utjecati? Poznato je da *način izvođenja nastavne jedinice utječe na ono što i kako djeca uče i misle* [1, str. 141]. Prema rezultatima, promjene u pristupu učenju i poučavanju itekako su potrebne. S tim u vezi, nužno je permanentno samopromatranje i revidiranje vlastitoga rada.

Kako radimo? Na čemu inzistiramo? Možda previše samo na usvajanju gradiva? Nastojimo li učenike uvesti u istraživački rad ili pak zapostavljamo ovu strategiju poučavanja (istraživačka metoda)? Kako provjeravamo konceptualno razumijevanje naših učenika? Jaz između proceduralnog znanja i konceptualnog razumijevanja očito postoji. Kako ga nastojimo premostiti?

Autorica često u svome radu svjedoči proceduralnom znanju i istodobno konceptualnom neznanju, bolje reći nerazumijevanju. Pokažimo to na dvama primjerima u okviru sadržaja koji razmatramo. Promotrimo eksponencijalnu nejednadžbu $2^x < 2^{3x-5}$. Većina je studenata zna riješiti. Međutim, ako zastanete u sljedećem koraku ($x < 3x - 5$), ili ih kasnije priupitate zašto je tome tako, kako to slijedi iz prethodnog, vrlo vjerojatno dobit ćete sljedeći odgovor:

„Pa to je lako, ako je dolje[4] broj veći od 1, znak nejednakosti je isti."

Za razliku od gore dane eksponencijalne nejednadžbe, manji broj studenata zna da je npr. $2^{\log_2 x}$ jednako $x$, ali u pravilu ne znaju zašto je to tako, iz čega to proizlazi.

Mi znamo da zbog svojstava inverznih funkcija vrijedi:
$\left(\exp_a \circ \log_a\right)(x) = a^{\log_a x} = x,\ \forall x, x \in \mathbb{R}^+$, i $\left(\log_a \circ \exp_a\right)(x) = \log_a a^x = x,\ \forall x \in R$ .

No pitanje je uočavaju li studenti u ovome problemu kompoziciju inverznih funkcija (pretpostavka je da znaju da su funkcije $\log_a$ i $\exp_a$ inverzne funkcije)? Znaju li što je kompozicija funkcija? Znaju li što je „rezultat" djelovanja kompozicije inverznih funkcija (logaritmiramo, pa potenciramo po istoj bazi)? [5]

Prema Kurniku, *neuspjesi učenika u matematici i neznanje koje pokazuju nakon završenog školovanja dobrim su dijelom posljedica činjenice da se nastava većinom izvodi na nižoj razini, gdje se isuviše inzistira samo na usvajanju gradiva, a zapostavljena je navedena viša razina.* [2, str. 321]. Misli se na primjenu znanstvenih metoda mišljenja i istraživanja (analiza i sinteza, analogija, apstrakcija i konkretizacija, generalizacija i specijalizacija, indukcija i dedukcija)[6] u nastavi, i to na postupnu i primjerenu primjenu. Nastavnici matematike tijekom sata često u govoru upotrebljavaju strukture poput *analiza pokazuje*, *analogno se dokazuje*, *rezultat ovih razmatranja je generalizacija*, *specijalizacijom dobivamo formulu...* [2, str. 320]. Razumiju li učenici u njima sadržane riječi: analiza, analogija, generalizacija, specijalizacija,..., kako se to provjerava? Smatra da objašnjenja izostaju budući da se najčešće podrazumijeva da su ti postupci učenicima poznati.

Znanja o navedenim postupcima od velike su važnosti za sve učenike, neovisno o njihovim daljnjim matematičkim obrazovnim stremljenjima.

Pristup nastavnika određenom problemu izvor je iskustva za učenike, potiče i usmjerava njihove misaone procese. S tog aspekta gledano, učenje učenika odvija se na barem dvije razine: učenik uči o sadržaju, mogli bismo reći razvija stručnost (užu), ali i uči usmjeravati vlastito učenje i mišljenje. Važno je stoga nastojati sve učenike, bez iznimke, podučiti tim postupcima i potaknuti ih da primjenu znanstvenog pristupa problemima prošire i na druga područja, da naučeno prenesu iz jednog područja u drugo[7].

[4]jedna je od ilustracija verbalne matematičke pismenosti studenata
[5]Napomenimo da je točan rezultat ponekad posljedica doslovce kraćenja, što nastavnik (ako ne pita) teško može detektirati. Takav postupak zamjećuje se pri rješavanju logaritamskih jednadžbi, primjerice $\log(x-3) = \log(6-x)$.
[6]Navedene osnovne znanstvene metode Kurnik iscrpno opisuje u svojim člancima. Neki su dani u literaturi.
[7]transferna vrijednost ovih znanja

Nadalje, treba naglasiti važnost određenih nastavnih sadržaja i tako im pristupiti. Primjerice, eksponencijalne funkcije koriste se za modeliranje mnogih problema iz stvarnog života[8], česte su u prirodi i tehnici; opisuju rast populacije (ljudi, životinja, bakterija), gašenje procesa poput pada struje nakon prekida strujnog kruga, pada temperature pri hlađenju, smanjenje amplitude titranja kao posljedica trenja, radioaktivni raspad... opisuju čak i učenje te zaboravljanje (što će učenicima vjerojatno biti posebno zanimljivo[9]).

Sadržajima iznimne obrazovne vrijednosti kojima pripadaju ove izdvojene klase funkcija treba u planu i provedbi posvetiti osobitu pažnju; osigurati dovoljno vremena za obradu i što je moguće bolji (učinkovitiji) pristup.

## Pristup obradi eksponencijalne funkcije

Eksponencijalna funkcija definira se formulom $f(x) = a^x$, za a > 0 i $a \neq 1$. Domena funkcije $f$ je skup realnih brojeva.[10]

Dvije su klase eksponencijalnih funkcija[11] bitno različitih. Jedna klasa obuhvaća funkcije eksponencijalnog rasta. Baza im je broj veći od 1 ($a > 1$) i sve one kvalitativno isto izgledaju. Drugu klasu čine eksponencijalne funkcije opadanja. Baza im je broj između 0 i 1 ($0 < a < 1$) i njihovi su grafovi kvalitativno isti. Stoga pri obradi eksponencijalne funkcije[12] razlikujemo slučajeve $a > 1$ i $0 < a < 1$.

U radu su priloženi nastavni materijali za obradu prvog slučaja. Obrada drugog slučaja posve je analogna u smislu provođenja analognih postupaka[13] kao u prvom slučaju. Kurnik ukazuje na važnost primjene analogije u nastavnom procesu; povezuje se gradivo i olakšava učenje, predavanje je jednostavnije. S druge strane naglašava da analogija omogućava nastavniku neprestanu izmjenu *nastavnih oblika i metoda u svrhu postizanja učinkovitije nastave* [3, str. 107]. Neke izmjene i navodi.

Nastavni materijali izrađeni su s namjerom da se učenici provedu kroz proces istraživanja i da im pomognu da se, analizirajući posebno, usmjere prema općem, odnosno da na temelju posebnih funkcija zaključe o nekim svojstvima[14] ove klase eksponencijalnih funkcija.

---

[8]pri čemu se $e^x$ često pojavljuje

Broj $e$ važan je za eksponencijalne procese. Približna mu je vrijednost 2,7182818284590. Može se aproksimirati po volji točno računanjem vrijednosti izraza $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ za dovoljno veliki $x$.

Leonhard Euler (1707. – 1783.), veliki švicarski matematičar, uveo je oznaku $e$ i nešto kasnije dokazao da je e iracionalan broj.

Osim funkcije $e^x$ istaknuta je i $10^x$ (ima konvencionalan značaj; na bazi 10 zasnovan je naš brojevni sustav).

[9]Ove funkcije (i druge) mogu kasnije poslužiti i kao primjeri za ispitivanje tijeka i crtanje grafa funkcije.

[10]Napomena: Za iracionalne eksponente ($x \in I$) vrijednost te funkcije definira se na poseban način (pomoću beskonačnog niza).

[11]Studenti često poistovjećuju funkcije $2^x$ i $x^2$.

[12]Kao uvodni zadatak nastavniku može poslužiti i konkretan primjer (npr. kultura bakterija – vidjeti [5], str. 357.)

[13]«Zaključivanje po analogiji može se u matematici provoditi u odnosu na objekt, svojstvo, postupak". [3, str. 101]

[14]odnosi se na svojstva koja sugeriraju grafovi

Vodeći se mišlju da *učitelj matematike često razmatra premali broj takvih slučajeva, pa izvedene tvrdnje postaju neuvjerljive i nejasne, a posljedica je manjkavo znanje učenika* [2, str. 327] u materijalima se razmatra više posebnih slučajeva: funkcije $2^x$, $3^x$, $e^x$ i još neke. Računaju se neke vrijednosti tih funkcija (formiraju se tablice), crtaju grafovi i opisuju.

Obradom drugog slučaja, induktivnim zaključivanjem dolazi se do svojstava druge klase eksponencijalnih funkcija, te se najzad oba slučaja objedinjuju. *Poopćavanjem se dolazi do izreka koje nisu samim time i dokazane* [4, str. 154]. Ovo treba imati na umu i reći učenicima.

Na kraju se učenicima mogu postaviti i pitanja (zadatci) tipa: Vizualiziraj koordinatni sustav i graf eksponencijalne funkcije (zadati funkciju). Jesi li zamislio/la ovakav graf? (Pokazati ga.)

## Nastavni materijali za obradu funkcija eksponencijalnog rasta

**I**

1. a) Popuni tablicu:

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | | | | | | | |

   b) Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 2^x$.

2. U kojoj točki graf siječe os $y$?
3. Graf funkcije je ______ osi $x$. (Umetni odgovarajuću riječ: *ISPOD* ili *IZNAD*.)

   Znači, vrijednosti funkcije su ______ 0. (Stavi odgovarajući znak: < ili > ili ≥.)
4. Kada $x$ raste, $2^x$ ______ . (Umetni odgovarajuću riječ: *RASTE* ili *PADA*.)

   Možemo reći i ovako: kada $x$ pada, $2^x$ ______ . (Umetni odgovarajuće: *RASTE* ili *PADA*.)
5. Kada $x$ neograničeno pada, $2^x$ pada prema ______ . Nadopuni.

**II**

1. Grafove funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 3^x$ nacrtaj u istom koordinatnom sustavu. (Za crtanje grafova upotrijebi različite boje.)
2. Odredi $x$ za koji se grafovi sijeku.

U sljedećim zadacima točan odgovor zaokruži.

3. Za koje je vrijednosti od $x$, graf od $f$ iznad grafa od $g$ ?  a) $x > 0$  b) $x < 0$

4. Za koje je vrijednosti od $x$, graf od $f$ ispod grafa od $g$ ? a) $x > 0$ b) $x < 0$
5. Grafovi se međusobno približavaju: a) za sve veće vrijednosti od $x$,

   b) za sve manje vrijednosti od $x$.

**III**

1. Grafove funkcija $f(x) = e^x$, $g(x) = 2^x$ i $h(x) = 3^x$ nacrtaj u istom koordinatnom sustavu. (Za crtanje grafova upotrijebi različite boje.)
2. Odredi $x$ za koji se grafovi sijeku.
3. Koji je graf iznad ostalih dvaju u području pozitivnih vrijednosti od $x$?
4. Koji je graf ispod ostalih dvaju u području pozitivnih vrijednosti od $x$?
5. Za negativne vrijednosti od $x$, koji je graf ispod (iznad) ostalih dvaju?

**IV**

1. Promotri još jednom grafove koje si nacrtao/la. Što uočavaš? Koja su njihova zajednička svojstva?
2. Kako bi izgledao graf[15] funkcije $5^x$? A kako graf funkcije $\left(\frac{5}{3}\right)^x$ ?
3. Uočavaš li da grafovi koje smo do sada razmatrali kvalitativno isto izgledaju?

Grafovi upućuju na sljedeća važna svojstva funkcija eksponencijalnog rasta. Poopćimo.

**V**

Osnovna svojstva grafa funkcije $f(x) = a^x$, $a > 1$

- Svi grafovi prolaze točkom ______.
- Os______ je horizontalna asimptota[16].
- Ako je $a > 1$, onda $a^x$______kada $x$ raste.

**VI**

1. Ponovi usmeno zadatak I (2-5) tako da umjesto $2^x$ govoriš (i misliš) $a^x$, $a > 1$.[17]
2. U zadatku II pokušaj umjesto o $2^x$ i $3^x$ misliti o $a^x$ i $b^x$, gdje su $a$, $b > 1$ i $a < b$.

[15]Kako će se učenici odgovoriti na ovo pitanje? Hoće li crtati graf kao i prije (koristeći tablicu prethodno) ili će nacrtati možda kvalitativan graf?

[16]ili se može izostaviti nešto drugo (npr. riječ „horizontalna")

[17]Nadahnuto sugestijom poznatog matematičara, učitelja iznimnog senzibiliteta za nastavu, Georgea Polye, (1887. – 1985.): „Za čitatelja će biti korisno da kao zadatak ponovi sve naše tvrdnje pridajući posebnu pozornost općenitosti – u tu svrhu umjesto 5 govoreći n." [6, str. 90]

## Zaključak

Rezultati testa, grafovi koje (ni)su studenti nacrtali i uz priloženi podsjetnik, ukazuju na znatno dublje korijene neznanja ispitanika, donedavno srednjoškolaca. Neke promjene u pristupu učenju i poučavanju svakako su potrebne. Postoji i jaz između proceduralnog znanja i konceptualnog razumijevanja.

Poučavanje usmjereno na usvajanje određenih postupaka i činjenica potrebno je svesti na razumnu mjeru, a poticati i razvijati kreativnost i istraživački duh učenika. Znanstvene metode mišljenja i istraživanja treba redovito i na odgovarajući način primjenjivati u nastavi.

Istraživačka metoda kao strategija poučavanja vrlo je važna budući da su učenici aktivni sudionici u procesu izgradnje vlastitih novih znanja.

Za očekivati je također da će znanstveni pristup problemima učenici prenijeti i na druga područja.

Nužno je osigurati dovoljno vremena i što je moguće učinkovitiji pristup za obradu ovih i drugih važnih nastavnih sadržaja. Suština sadržaja koji se razmatra uvijek mora biti naglašena.

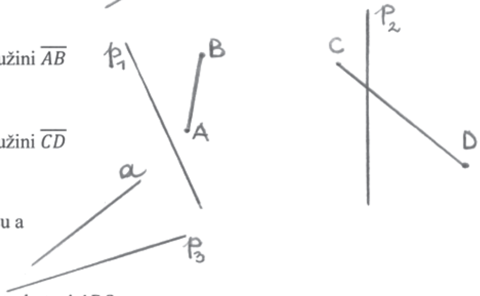
Ova „načela" izlaze izvan okvira nastave matematike.


*Slika* $2_2$*. Test* $A_2$

Ime i prezime:__________________________


- Odredi točku **T´** simetričnu točki T

obzirom na pravac p. **Opiši postupak**.




- Odredi dužinu $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ simetričnu dužini $\overline{AB}$

obzirom na pravac $p_1$.

- Odredi dužinu $\overline{\boldsymbol{C'D'}}$ simetričnu dužini $\overline{CD}$

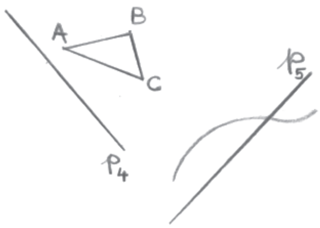
obziromna pravac $p_2$.

- Odredi pravac **a´** simetričan pravcu a

obzirom na pravac $p_3$.

- Odredi trokut $\Delta \boldsymbol{A'B'C'}$ simetričan trokutu $\Delta ABC$

obzirom na pravac $p_4$.




- Odredi krivulju simetričnu zadanoj krivulji

obzirom na pravac $p_5$.

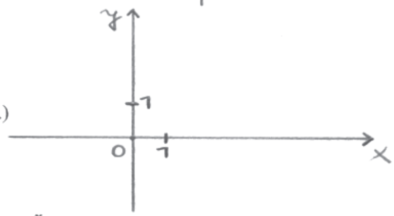
- Odredi lik simetričan zadanom liku

obzirom na pravac p:

a)


b)


**1.** U danom kordinatnom sustavu:




- nacrtaj krivulju $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

(*Uputa*: popuni tablicu i ucrtaj dobivene točke.)

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | | | | | |

- nacrtaj pravac $y = x$,
- nacrtaj krivulju simetričnu krivulji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ obzirom na pravac $y = x$.

**2.** Računski odredi koordinate točke T´ simetrične točki T(-2,4) obzirom na pravac $y = x$.

(*Uputa*: za račun koristi poleđinu stranice.)

*Podsjetnik*:

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$.................................uvjet okomitosti pravaca $p_1$ i $p_2$

$y - y_1 = k(x - x_1)$................jednadžba pravca kroz točku $(x_1,x_2)$ u zadanom smjeru

$P(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$......................koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$

*Slika $3_2$. Test $B_2$*

## Literatura


1. Wood, D.: *Kako djeca misle i uče: društveni konteksti spoznajnog razvitka* (prijevod s engleskog), Educa, Zagreb, 1995.
2. Kurnik, Z.: *Znanstvenost u nastavi matematike*, Metodika, vol.9, br. 17, 2008., 318-327. http://hrcak.srce.hr/34802
3. Kurnik, Z.: *Analogija*, Matematika i Škola, godina II., br. 3, 2000., 101-109. http://mis.element.hr/list/2/broj/3/clanak/10/analogija
4. Kurnik, Z.: *Generalizacija*, Matematika i Škola, godina II., br. 4, 2000., 147-154. http://mis.element.hr/list/2/broj/4/clanak/11/generalizacija
5. Krnić, L.; Šikić, Z.: *Račun diferencijalni i integralni*, *I. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
6. Polya, G.: *Matematičko otkriće* (prijevod s engleskog), HMD, Zagreb, 2003.
7. Kurnik, Z.: *Analiza*, Matematika i Škola, godina I., br. 2, 1999., 54-64. http://mis.element.hr/list/2/broj/2/clanak/9/analiza
8. Kurnik, Z.: *Specijalizacija*, godina VI., br. 27, 2004., 52-58. http://mis.element.hr/list/7/broj/27/clanak/338/specijalizacija
9. Barnett, A. R.; Ziegler, R. M.; Byleen, E. K.: *Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti* (prijevod s engleskog), 8. izdanje, Mate d.o.o., Zagreb, 2006.
10. Dakić, B.; Elezović, N.: *MATEMATIKA 2*, *udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije*, *2. dio*, 4. izdanje, Element d.o.o., Zagreb, 2007.